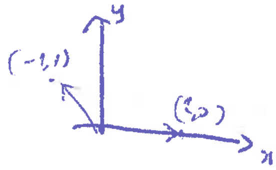
Familles génératrices.

Définition : Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une partie de E.
Une <u>combinaison linéaire</u> d'éléments dans $\mathcal{A}$ est un vecteur de E qui s'écrit comme une somme <u>finie</u> du type :
$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \quad a_i \in \mathcal{A}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ (m \in \mathbb{N})$.

On a déjà vu que l'ensemble de toutes combinaisons linéaires d'éléments dans $\mathcal{A}$ est le plus petit sous-espace de E contenant $\mathcal{A}$, noté $Vect(\mathcal{A})$.
Exemple : Si $\mathcal{A}$ est une famille de vecteurs $\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}$ (I fini ou infini),
$Vect(\{a_i\}_{i\in I}) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$, avec $\lambda_i \neq 0$ seulement pour un nombre fini de $i \in I\}$.

Définition : On dit que $\mathcal{A}$ <u>engendre</u> l'espace E si tout vecteur $v \in E$ s'écrit comme combinaison d'éléments dans $\mathcal{A}$:
$\forall v \in E, \ \exists m \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in \mathcal{A}$ t.q. $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.
Autrement dit, $\mathcal{A}$ engendre E si et seulement si $E = Vect(\mathcal{A})$
(de même $\mathcal{A}$ engendre un sous-espace F de E si $F = Vect(\mathcal{A})$)

Exemples : 1) $\{(-1;1);(2;0)\}$ engendrent $\mathbb{R}^2$



Il faut montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $(x,y) = \lambda(-1,1) + \mu(2,0)$.

$\begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ \mu = \frac{x+y}{2} \end{cases}$ ok

$\{\underset{a_1}{(-1,1)}; \underset{a_2}{(1,2)}; \underset{a_3}{(2,0)}\}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.
Comme précédemment, il faut resoudre $\begin{cases} x = -\lambda + \mu + 2\nu \\ y = \lambda + 2\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = y - 2\mu \\ \nu = \frac{x+y-3\mu}{2} \end{cases}$
Notons que dans ce cas l'écriture $v = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3$ n'est pas unique

C7 ②

3) $\{(2,1);(4,2)\}$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

$\begin{cases} x = 2\lambda + 4\mu \\ y = \lambda + 2\mu \end{cases} \to \begin{cases} x = 2y - 4\mu + 4\mu \\ \lambda = y - 2\mu \end{cases} \begin{cases} x = 2y \\ \lambda = y - 2\mu \end{cases}$ a solution $\Leftrightarrow$ $x = 2y$.

4) En général, Soient $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ~~Pour~~ Alors

$\{v, w\}$ engendrent $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow v$ et w ne sont pas colinéaires ($\nexists \lambda, \mu \neq (0,0) : \lambda v = \mu w$)

$(v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2))$

$\Rightarrow$ par absurde, v, w colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid v = \alpha w$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda v_1 + \mu w_1 = (\lambda + \alpha\mu) w_1 \\ y = \lambda v_2 + \mu w_2 = (\lambda + \alpha\mu) v_2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \mathrm{Vect}(\{v,w\}) \Leftrightarrow (x,y) \in \mathrm{Vect}(\{w\}) \subsetneq \mathbb{R}^2$.

$\Leftarrow$ Supposons $v_1 \neq 0$

$\star \begin{cases} x = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = \lambda v_2 + \mu w_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - \mu w_1}{v_1} \\ y = \dfrac{x - \mu w_1}{v_1} v_2 + \mu w_2 \end{cases} \Rightarrow \mu(v_1 w_2 - w_1 v_2) = v_1 y - v_2 x$

~~Si $v \neq (0,0)$ $v_1 y - v_2 x$ n'est pas toujours nulle pour $x, y \in \mathbb{R}$.~~

~~donc il faut avoir $v_1 w_2 = w_1 v_2 \Leftrightarrow \frac{w_2}{v_2} = \frac{w_1}{v_1}$ v et w colinéaires.~~

Si $v = \alpha w \Rightarrow v_1 = \alpha w_1,\ v_2 = \alpha w_2 \Rightarrow v_1 w_2 - w_1 v_2 = \alpha w_1 w_2 - \alpha w_1 w_2 = 0$.

Si $w_1 v_2 = w_2 v_1 \Rightarrow$ ~~$w_1 = \frac{v_2}{w_2} v_1$, $v_2 = \frac{v_2}{w_2}$ donc~~

$w_1 = \underbrace{\dfrac{w_1}{v_1}}_{\alpha} v_1,\quad w_2 = \underbrace{\dfrac{w_1}{v_1}}_{\alpha} v_2 \Rightarrow w = \alpha v$ sont colinéaires

donc v et w sont colinéaires $\Leftrightarrow v_1 w_2 = w_1 v_2$.

Comme v et w ne sont pas colinéaires, $v_1 w_2 - w_1 v_2 \neq 0$ et $\star$ a toujours solution $\square$

5) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$.

Alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ engendrent $\mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

6) Considérons les solutions d'un système linéaire :

$(\star\star) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \end{cases}$

$x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$b = (b_1 \dots b_m) \in \mathbb{R}^m$

$a_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j}) \in \mathbb{R}^m$.

Prop : le système $(*)$ possède au moins une solution $\Leftrightarrow b \in Vect(\{a_1, .., a_n\})$.

Preuve. Le système $(*)$ peut être réécrit comme :

$$x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = b \quad (**)$$

Donc $(*)$ a au moins une solution $\Leftrightarrow \exists x = (x_1 \dots x_n) : (**)$ $\Leftrightarrow b \in Vect(\{a_1 .. a_p\})$. □

Familles libres :

Proposition : Soit $\mathcal{A}$ une partie d'une espace vectoriel E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathcal{A}$, on a.

$$\sum_{i=..} \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i.$$

(ii) $\nexists v \in \mathcal{A}$ t.q. $v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$, $a_i \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Preuve : $(i \Rightarrow ii)$ Supposons par absurde que $\exists v \in \mathcal{A}$ t.q. $v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$ $v \neq a_i \forall i$.

Alors $\underbrace{1 \cdot v - \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i}_{\lambda_0 v_0 + \sum^{n} \lambda_i a_i,\ -\mu_i} = 0$ est une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls $(\lambda_0 = 1 \neq 0)$, en contradiction avec (i)

$(i \Leftarrow ii)$ Supposons par absurde qu'il existe une combinaison linéaire $\sum \lambda_i a_i = 0$, avec l'un des λ_i (disons λ_1) $\neq 0$.

Alors $a_1 = \sum_{i=2}^{m} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i$, en contradiction avec (ii). □

Définition : Une partie $\mathcal{A}$ (ou une famille $(a_i)_{i \in I}$) est dite <u>libre</u> si $\mathcal{A}$ vérifie l'une des conditions précédentes i, ii.

On dit aussi que les vecteurs dans $\mathcal{A}$ sont <u>linéairement indépendants</u>.

Dans le cas contraire, on parle de <u>famille liée</u>, ou on dit que les vecteurs dans $\mathcal{A}$ sont <u>linéairement dépendants</u>.

Exemple : 1) $\{v\}$ est une famille libre $\Leftrightarrow v \neq 0_E$.
Plus en général, une famille contenant 0_E est toujours liée.

2) Les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.

Supposons $\lambda(1,-1)+\mu(2,0)=0 \Rightarrow \lambda+2\mu=0$ et $\lambda=0$
$\Rightarrow \lambda=\mu=0$.

3) Plus en général, $\{v,w\}$ est une famille libre $\Leftrightarrow$ v et w ne sont pas colinéaires.

v et w sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ $\lambda v=\mu w \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ $\lambda v-\mu w=0 \Leftrightarrow \{v,w\}$ est liée.

4) Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ $e_3=(0,0,1)$ forment une famille libre.

5) Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\{(1,2,0);(-3,0,1);(-2,2,1)\}$ sont linéairement dépendants, car $1\cdot(1,2,0)+1\cdot(-3,0,1)+(-1)\cdot(-2,2,1)=(0,0,0)$.

~~6) Dans $\mathbb{R}^3$~~

6) Système linéaire homogène :

$$(*)\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dots+a_{1,n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\dots+a_{m,n}x_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1\cdot a_1+\dots+x_n\cdot a_n=0.$$

$x_j\in\mathbb{R}$ $\quad a_j=(a_{1,j},\dots,a_{m,j})\in\mathbb{R}^m$.

Prop: (*) admet une solution autre que $x=0_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si la famille $\{a_1,\dots,a_n\}$ est liée dans $\mathbb{R}^m$.

Preuve : $\exists x\neq 0_{\mathbb{R}^n}$ solution de (*) $\Leftrightarrow \exists x\neq 0_{\mathbb{R}^n} : x_1a_1+\dots+x_na_n=0$
$\Leftrightarrow \{a_1,\dots,a_n\}$ est une famille liée.

Base d'un espace vectoriel.

Proposition. Soit E un espace vectoriel, et $A \subseteq B$ deux parties.

1) Si ~~$A \subseteq B$ et~~ A est génératrice $\Rightarrow$ B est génératrice.
2) Si ~~$A \subseteq B$ et~~ B n'est pas génératrice $\Rightarrow$ A n'est pas génératrice
3) Si B est libre $\Rightarrow$ A est libre
4) Si A est liée $\Rightarrow$ B est liée.

Preuve : facile... 2 est la contraposée de 1, 4 la contraposée de 3.

Définition : Une <u>base</u> d'un espace vectoriel E est une famille <u>libre</u> et <u>génératrice</u> de E.

Exemple : 1) Les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,0)$ constituent une base de $\mathbb{R}^2$

2) Plus généralement, $\{v, w\}$ deux vecteurs $\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si v et w ne sont pas colinéaires.

3) La <u>base canonique</u> de $\mathbb{R}^n$ est la famille

$$(e_1, \dots, e_n), \quad \text{avec} \quad e_j = (0 \dots 0, \overset{j}{1}, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ex : $n=3$: $\{\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)}\}$.

4) $\{(1,-1), (2,0), (1,2)\}$ est génératrice, pas libre $\mathbb{R}^2$ 5) $\{(2,1,0), (0,0,-2)\}$ est libre pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Proposition : Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(b_i)_{i\in I}$ est une <u>base</u> de E ;

(ii) $\forall v \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments dans $(b_i)_{i\in I}$.

Preuve $(i \Rightarrow ii)$ Si $B = (b_i)_i$ est une base, alors B est génératrice : $\forall v \in E$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$. Montrons que cette écriture est unique.

Si $v = \sum \lambda_i b_i = \sum \mu_i b_i$, alors $0 = \sum (\lambda_i - \mu_i) b_i$ est une combinaison linéaire nulle. Comme $(b_i)_i$ est libre, $\lambda_i - \mu_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ \forall i$.

$(ii \Rightarrow i)$ Supposons que $\forall v \in B\ \exists!\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, $v = \sum \lambda_i b_i$.

On a donc que $(b_i)_{i\in I}$ est génératrice. Montrons que $(b_i)_i$ est libre.

~~Supposons que~~ Soit $\sum \lambda_i b_i = 0_E$ une combinaison linéaire nulle.

Mais $0_E = \sum_{i\in I} 0 \cdot b_i$. par unicité de la décomposition, $\lambda_i = 0\ \forall i$, et $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

Rmq : $(b_i)_{i=1...n}$ est une base de $E \Leftrightarrow E = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{b_i\})$.

Proposition : Soient E un espace vectoriel et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(b_i)_i$ est une base de E

(ii) $(b_i)_i$ est une famille libre <u>maximale</u> (au sens de l'inclusion des ensembles)

(iii) $(b_i)_i$ est une famille génératrice <u>minimale</u> (").

Preuve : $(i \Rightarrow ii)$ $B = (b_i)_{i\in I}$ est une base $\Rightarrow B$ est libre

Montrons qu'elle est maximale au sens de l'inclusion. ~~Supposons qu'il existe~~ Soit $\mathcal{A} \supsetneq B$ une famille contenant strictement B. Montrons que $\mathcal{A}$ n'est pas libre.

Soit $a \in \mathcal{A} \setminus B$. Comme B est une base, $\exists\ \lambda_i$ tq $a = \sum \lambda_i b_i$.

Donc $a - \sum \lambda_i b_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle non triviale, et $B \cup \{a\}$ est liée. Donc $\mathcal{A}$ est liée.

$(i \Rightarrow iii)$ Comme B est une base, B engendre E.

~~Supposons~~ Soit $\mathcal{A} \subsetneq B$ une famille contenue dans B. Montrons que $\mathcal{A}$ n'est pas génératrice. Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ est génératrice.

Soit $b \in B \setminus \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est génératrice, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ tq. $b = \sum_{b_i \in \mathcal{A}} \lambda_i b_i$.

Donc $b - \sum \lambda_i b_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle non-triviale, ~~...~~ d'éléments dans B. Contradiction (B est libre).

$(ii \Rightarrow i)$ Soit B une famille libre maximale de E. Montrons que B est génératrice (et donc une base).

~~Soit $v \in E \setminus B$~~. Soit $v \in E$. Si $v \in B$, donc $\exists\ b \in B$ tq $v = b$, donc

$v \in \mathrm{Vect}(B)$. Supposons $v \notin B$. Alors $B \cup \{v\}$ est une famille liée (par maximalité de B) : $\exists\, \lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}$, ~~pas~~ tous nuls, tels que

$$\lambda v + \sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0_E .$$

Remarquons que $\lambda \neq 0$: si $\lambda = 0$ par l'absurde, $\sum \lambda_i b_i = 0_E$, et comme B est libre, $\lambda_i = 0\ \forall i$, absurde.

Alors on a $v = \sum_{i \in I} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) b_i$ et $v \in \mathrm{Vect}(B)$. (ii)

(iii ⇒ i) Soit B une famille génératrice minimale de E. Montrons que B est libre. ~~Soit~~ Considérons une combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$.
Supposons que ~~$\exists$~~ $\exists\, i_0 \in I$ t.q. $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors

$$b_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right) . b_i .$$

Donc la famille $B \setminus \{b_{i_0}\}$ est aussi génératrice, contre l'hypothèse de minimalité de B. Donc $\lambda_i = 0\ \forall i$, et B est libre.

$\square$

Espaces de type fini.

Définition : Un espace vectoriel est de <u>type fini</u> s'il admet une famille génératrice finie.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est un espace de type fini
~~Exemple : E est de type fini si ... espace~~

Théorème (de la base incomplète). Soient E un espace de type fini, $\mathcal{L} \subset E$ une famille libre, et $\mathcal{G} \subset E$ une famille génératrice finie. Il existe une base B de E telle que $\mathcal{L} \subseteq B \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
En particulier, toute famille libre peut être complétée ~~en~~ en une base.

La preuve utilise les propriétés suivantes.

CA-8

Lemme 1) Soit $\mathcal{A} \subseteq E$ une famille, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. $\mathcal{A}$ est génératrice $\iff$ $g \in \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$ $\forall g \in \mathcal{G}$.

Preuve : ($\Rightarrow$) automatique.

($\Leftarrow$) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$ contient toutes combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{G}$. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = E$. $\square$

Lemme 2 : Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. Supposons que $V \subsetneq E$, et soit $u \in E \setminus V$. Alors $\mathcal{L} \cup \{u\}$ est libre.

Preuve : Supposons par l'absurde que $\mathcal{L} \cup \{u\}$ est liée : $\exists \lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}$, ~~tels que~~ non tous nuls et tels que $\lambda u + \sum_i \lambda_i a_i = 0_V$, où $\mathcal{L} = \{a_i : i \in I\}$. Notons que $\lambda \neq 0$ (car $\mathcal{L}$ est libre).

Donc $u = \sum \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) a_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, contradiction. $\square$

Preuve (théorème) : Soit $P := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G} \mid \mathcal{L} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ et $\mathcal{L} \cup \mathcal{A}$ est libre$\}$.

P n'est pas vide : $\emptyset \in P$, car $\mathcal{L} \cup \emptyset = \mathcal{L}$ est libre.

P est ordonné par l'inclusion.

Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$, alors $\#\mathcal{A} \leq \#\mathcal{G} < +\infty$ par hypothèse.

Il s'ensuit que $\exists \mathcal{A}_0 \in P$ maximale.

Montrons que $\mathcal{L} \cup \mathcal{A}_0$ est génératrice (et donc une base de E).

Supposons par l'absurde que ~~[illegible]~~ $\mathrm{Vect}(\mathcal{L} \cup \mathcal{A}_0) \subsetneq E$.

Par le lemme 1, $\exists g \in \mathcal{G}$ t.q. $g \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L} \cup \mathcal{A}_0)$.

Par le lemme 2, $\mathcal{L} \cup \mathcal{A}_0 \cup \{g\}$ est libre, contre la maximalité de $\mathcal{A}_0$: contradiction. Donc $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{A}_0$ est une base. $\square$

Corollaire : Tout espace vectoriel de type fini admet une base finie.
(Il suffit d'appliquer le théorème à $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie).

~~Corollaire~~ Théorème (existence d'un supplémentaire) : Soit E un espace vectoriel (de type fini), et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $\exists W$ sous-espace vectoriel de E qui est un supplémentaire de V : $V \oplus W = E$.
$\forall \mathcal{G}$ partie génératrice de E, $\exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$, $W = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.

Preuve : Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice (finie) de E.

Soit $P = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G} \mid \mathcal{A} \cap V = \emptyset \text{ et } V + \mathrm{Vect}(\mathcal{A}) = E\}$.

P n'est pas vide ($\mathcal{G} \setminus V \in P$) et il est ordonnée par l'inclusion.
~~Soit A_0 un~~. ~~De plus~~. Soit $\mathcal{A}_0$ un élément minimal de P.

On montrera que $V \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_0) = E$.

~~Comme~~ On a $V + \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_0)$ par définition.

Soit $v \in V \cap \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_0)$. Supposons par l'absurde que $v \neq 0_E$.
$\Downarrow$

$v = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \qquad \mathcal{A}_0 = \{a_i \mid i \in I\}$. Comme $v \neq 0_E$, on a $\exists\, i_0 \in I$, $\lambda_{i_0} \neq 0$.

donc $a_{i_0} = v + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right) a_i$. Donc $V + \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_0 \setminus \{a_{i_0}\}) = V + \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_0) = E$
contradiction par la minimalité de $\mathcal{A}_0$. □

Corollaire : soit E un espace vectoriel de type fini et V un sous-espace vectoriel de E. Alors V est de type fini.

Preuve : Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. ($\exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ t.q. $W = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$)
$\exists W$, $V \oplus W = E$ (par le théorème).

$\forall g_i \in \mathcal{G}$. $\exists! v_i \in V, w_i \in W$ t.q. $v_i + w_i = g_i$.

Alors ~~$\mathcal{A}$ Soit~~ $\mathcal{V} = \{v_i\}$ est une famille génératrice de V.

~~Supposons par l'absurde ∃ v ∉ Vect~~(V).

$\forall v \in V$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \sum \lambda_i g_i = \sum \lambda_i (v_i + w_i) = \underbrace{\sum \lambda_i v_i}_{= v} + \underbrace{\sum \lambda_i w_i}_{= 0}$

par unicité de l'écriture. □

Corollaire. Toute partie libre $\mathcal{L}$ d'un espace vectoriel de type fini est finie.

Preuve : Soit $\mathcal{L}$ une partie libre de E. ~~Supposons que A moins de substituer~~

$Vect(\mathcal{L}) =: F$ est un sous-espace vectoriel de E, donc est de type fini.

À moins de remplacer E par F, on peut donc supposer que $\mathcal{L}$ est aussi génératrice, donc une base.

Comme E est de type fini, il existe une base finie B.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}$ est infinie. Soit $\mathcal{L} = \{v_i \mid i \in I\}$, $B = \{b_j \mid j \in 1 \dots n\}$

$\forall j$, $b_j = \sum \lambda_{i,j} v_i$ avec $\lambda_{i,j} \neq 0$ seulement pour un nombre fini.

Appellons $\{v_1 \dots v_N\}$ les vecteurs qui apparaissent dans ces écritures.

Il s'ensuit que $E = Vect(\mathcal{L}) = Vect(\underbrace{\{v_1 \dots v_N\}}_{\mathcal{L}'})$.

Comme $\mathcal{L}'$ est fini, on a $\mathcal{L}' \subsetneq \mathcal{L}$, engendre E, et est libre, donc une base.

Mais on a montré que une base est une famille minimale qui engendre E : absurde ($\mathcal{L}' \subsetneq \mathcal{L}$ est plus petit) □